RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	Session principale	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

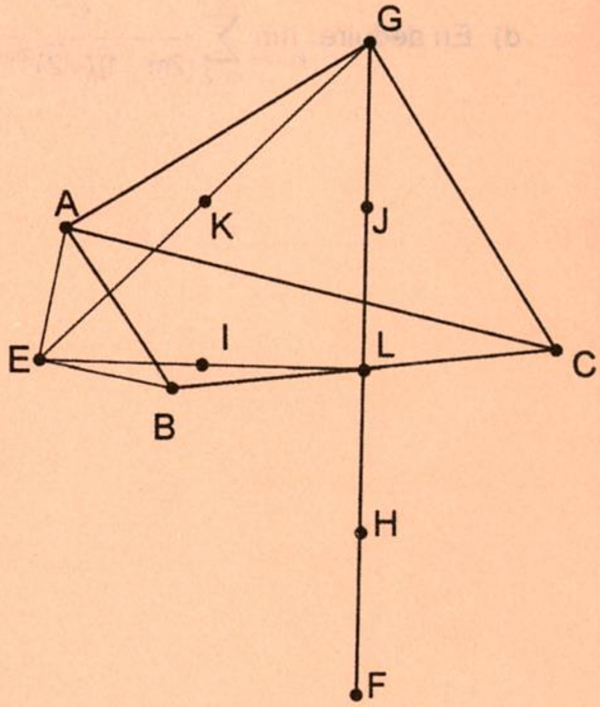
Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle direct, non rectangle et non isocèle.

GAC et EBA sont des triangles directs, rectangles et isocèles respectivement en G et en E.

L, K, I et J sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[GE]$, $[EL]$ et $[GL]$. F et H sont les symétriques respectifs de G et J par rapport à L.

On note r_1 et r_2 les rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs G et E. S_L désigne la symétrie centrale de centre L.



1) a) Déterminer $r_2 \circ S_L \circ r_1(A)$.
   Caractériser $r_2 \circ S_L \circ r_1$.
   b) En déduire que le triangle EFG est rectangle, isocèle.
   c) Justifier que le quadrilatère LJKI est un carré.
2) Soit φ la symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{LK}$ et d'axe Δ passant par I.
   On pose $g = \varphi \circ S_{(LE)}$, où $S_{(LE)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (LE).
   a) Montrer que $\Delta = (IH)$.
   b) Montrer que $g(J) = I$ et $g(L) = E$.
   c) Prouver que g est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
3) Soit f l'antidéplacement qui envoie J en I et L en E.
   a) Justifier que f est une symétrie glissante.
   b) Donner les éléments caractéristiques de f.
4) Soit M un point du plan. Soient M' et M'' les images de M respectivement par f et g.
   Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 2 : (4 points)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Dans la figure 1 de l'annexe, (Γ) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, A, B et C sont les points d'affixes respectives 1, $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Soit Q un point du cercle (Γ) d'affixe un nombre complexe a, distinct de $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

1) On désigne par R le point d'affixe $a+\bar{a}$.

   a) Vérifier que $R\in\left(O,\ \vec{u}\right)$. Construire R.

   b) Déterminer les nombres complexes a pour lesquels O, R et Q sont alignés.

2) Soit P le point du plan d'affixe ia et M un point d'affixe z non nul.

   a) Justifier que P est l'image de Q par une rotation que l'on précisera. Construire P.

   b) Montrer que A, P et M sont alignés $\Leftrightarrow \left(i\bar{a}+1\right)z+\left(ia-1\right)\bar{z}=i\left(a+\bar{a}\right)$.

   c) Montrer que $(AP)\perp(OM)\Leftrightarrow\left(i\,\bar{a}+1\right)z-\left(ia-1\right)\bar{z}=0$.

   d) Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP). On désigne par Z_H l'affixe du point H.

   Justifier que $Z_H=\dfrac{i\left(a+\bar{a}\right)}{2\left(i\bar{a}+1\right)}$.

3) Soit N le point d'affixe $Z_N=\dfrac{\left(a+\bar{a}\right)}{\left(i\bar{a}+1\right)}$.

   a) Vérifier que N est l'image de H par une similitude que l'on déterminera.

   b) Construire le point N.

   c) Déterminer l'ensemble sur lequel varie le point N lorsque Q varie sur le cercle (Γ) privé des points B et C.

Exercice 3 : (4 points)

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n=2\times5^n+7$.

1) a) Justifier que pour tout entier naturel n, a_n est impair.

   b) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste modulo 8 de 5^n.

   c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\equiv1 \pmod 8$.

2) a) Montrer que si $\begin{cases}x\equiv 1 \pmod 8\\ x\equiv 7 \pmod{125}\end{cases}$ alors $x\equiv 257 \pmod{1000}$.

   b) Montrer que pour tout $n\geq3$, $a_n\equiv257 \pmod{1000}$.

   c) Quels sont les trois derniers chiffres de $\left(2\times5^{2020}+7\right)\left(2\times5^{2021}+7\right)$?

3) a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $5a_{2n}-a_{2n+1}=28$.

   b) Soit d le PGCD de a_{2n} et a_{2n+1}. Montrer que d est différent de 7.

   c) Trouver alors d.

Exercice 4 : (7 points)

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan P.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}$.

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Vérifier que pour tout réel x, $0 < f(x) < 1$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection f^{-1} de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α telle que $0,5 < \alpha < 0,6$.

d) Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x. Interpréter graphiquement le résultat.

4) Dans la figure 2 de l'annexe, on a construit la droite d'équation $y = x$ et on a placé le réel α sur l'axe des abscisses et le réel $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur l'axe des ordonnées.

a) Tracer la courbe (ζ).

b) Tracer la courbe (ζ') de f^{-1}

5) a) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - \ln(1+\sqrt{1+e^{2x}})$ est une primitive de f.

b) On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (ζ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

Montrer que $A = \alpha + \ln\left(\dfrac{\alpha(1+\sqrt{2})}{\alpha+1}\right)$.

II. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_k définie sur $[0,+\infty[$, par $F_k(x) = \int_0^x (f(t))^k \, dt$.

1) a) Montrer que la fonction F_k est croissante sur $[0,+\infty[$,

b) Montrer que pour tout réel $t \in [0,+\infty[$, $0 \le (f(t))^k \le e^{-kt}$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $0 \le F_k(x) \le \dfrac{1}{k}$

d) Montrer alors que la fonction F_k possède une limite finie l_k quand x tend vers $+\infty$.

e) Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} l_k = 0$.

2) a) En utilisant la question I.5.a) montrer que $l_1 = -h(0)$.

b) Montrer que pour tout réel $t \in [0,+\infty[$, $(f(t))^3 - f(t) = f'(t)$.

c) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $F_3(x) = F_1(x) + f(x) - f(0)$.

d) Montrer que $I_3 = \ln(1+\sqrt{2}) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $k \geq 2$,

$$F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \frac{1}{2k-1}\left((f(x))^{2k-1} - (f(0))^{2k-1}\right).$$

b) En déduire que $I_{2k+1} - I_{2k-1} = \dfrac{-1}{(2k-1)(\sqrt{2})^{2k-1}}$, $k \geq 2$.

c) Montrer que $I_{2k+1} = I_3 - \displaystyle\sum_{m=2}^{k} \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$, $k \geq 2$.

d) En déduire $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \sum_{m=2}^{k} \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2020)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

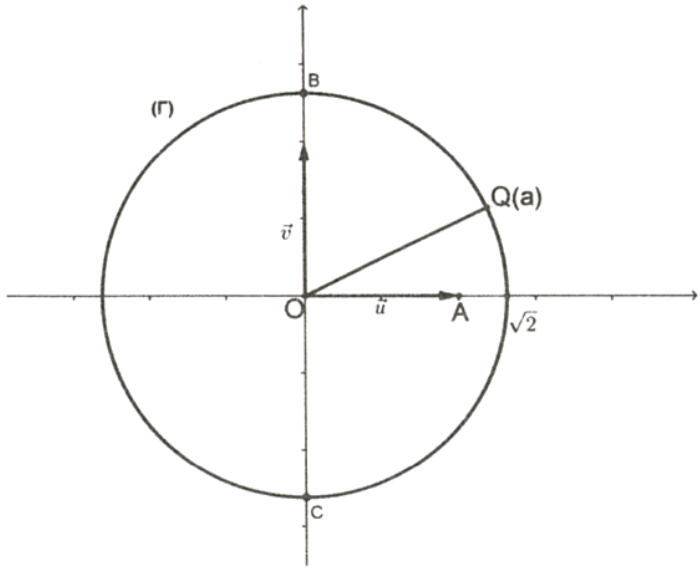


Figure 2