RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	**Session de contrôle**
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription

Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5,5 points)

Le plan est orienté. Dans la figure de l'annexe jointe,

- Le triangle OEB est rectangle en B et tel que $\left(\overrightarrow{OE}, \widehat{\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
- Le triangle OEF est rectangle en E et tel que $\left(\overrightarrow{FE}, \widehat{\overrightarrow{FO}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
- Le point I est le milieu du segment $[OF]$.

1) On pose $R = S_{(OE)} \circ S_{(OB)}$.

a) Justifier que R est la rotation de centre O et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

b) Montrer que $R(E) = I$.

2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2. On pose $f = h \circ R$.

a) Montrer que $f(E) = F$.

b) Montrer que f est une similitude directe dont on déterminera les éléments caractéristiques.

3) La médiatrice du segment $[IE]$ coupe la droite (BE) en un point A.

a) Montrer que $f(B) = A$.

b) Vérifier que $EA = EO$. Montrer alors que le quadrilatère AEIF est un losange.

4) Soit g la similitude indirecte telle que $g(B) = A$ et $g(E) = F$.

On désigne par Ω le centre de g et on pose $K = g(F)$.

a) Montrer que le rapport de g est égal à 2.

b) Justifier que $\left(\overrightarrow{FE}, \widehat{\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{EA}, \widehat{\overrightarrow{EF}}\right) [2\pi]$.

c) En déduire que $\left(\overrightarrow{FE}, \widehat{\overrightarrow{FK}}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$ puis que $F \in [EK]$.

d) Montrer que le point Ω appartient à la droite (EF) privée du segment $[EF]$.

e) En déduire l'axe de g.

f) Construire le point Ω.

5) a) Montrer que $g\big((\Omega I)\big)=(\Omega A)$.

b) Montrer que les points Ω, B et I sont alignés.

Exercice 2 (3,5 points)

On dispose d'une urne contenant cinq boules portant les numéros $-1, 0, 0, 1, 2$.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) On considère les évènements :

A : «Les deux boules tirées sont de même numéro.»

B : «Avoir au moins une boule numérotée 0.»

a) Calculer la probabilité de l'évènement A.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement B est égale à $\frac{7}{10}$.

2) On désigne par X la variable aléatoire égale au produit des numéros des boules tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

3) Une expérience consiste à répéter l'épreuve précédente n fois de suite $(n \geq 2)$ en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient au moins une boule numérotée 0.

a) Déterminer $P(Y=1)$.

b) Déterminer la plus petite valeur de n pour que le nombre moyen de fois où l'on obtient au moins une boule numérotée 0 soit supérieur ou égal à 5.

Exercice 3 (4 points)

Partie A

Soit p un nombre premier tel que $p > 3$ et $p \equiv 2 \pmod 3$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_p) : x^3 \equiv 1 \pmod p$.

1) Montrer que si $x \equiv 1 \pmod p$ alors x est une solution de (E_p).

2) Soit x une solution de (E_p).

a) Montrer que $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

b) En déduire que $x \equiv 1 \pmod p$.

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_p).

Partie B

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_{43}) : x^3 \equiv 1 \pmod{43}$.

1) Montrer que $x^3 \equiv 1 \pmod{43}$ si et seulement si $x \equiv 1 \pmod{43}$ ou $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43}$.

   (On pourra remarquer que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.)

2) a) Vérifier que $(2x+1)^2 + 3 = 4(x^2 + x + 1)$ et que $30^2 \equiv -3 \pmod{43}$.

   b) Montrer que $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43}$ si et seulement si $(2x+1)^2 \equiv -3 \pmod{43}$.

   c) En déduire que :

   $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43} \Rightarrow (2x - 29) \equiv 0 \pmod{43}$ ou $(2x + 31) \equiv 0 \pmod{43}$.

3) a) Vérifier que 22 est un inverse de 2 modulo 43.

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_{43}).

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$.

On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1) Montrer que f est paire.

2) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interpréter.

3) a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1 - e^{2x})\, e^x}{(1 + e^{2x})^2}$, pour tout réel x.

   b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Tracer (ζ).

Partie B

Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^{\ln x} f(t)\, dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

2) a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \tan x$ est une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]0, +\infty[$.

   On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

   b) Déterminer $g^{-1}(1)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g^{-1}(x)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, pour tout $x>0$.

3) Montrer que $F(x)=g^{-1}(x)-\dfrac{\pi}{4}$, pour tout $x>0$.

4) Soit $\lambda>0$. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ζ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-\lambda$ et $x=\lambda$.

a) Montrer que $A(\lambda)=2\,F(e^{\lambda})$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

Partie C

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\ F(e^t)\ dt$.

1) a) Montrer que pour tout réel $t\geq 0$, $0\leq F(e^t)\leq\dfrac{\pi}{4}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n=\dfrac{F(e)}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\ f(t)\ dt$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,I_n=g^{-1}(e)-\dfrac{\pi}{4}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques

Session de contrôle (2022)

Annexe à rendre avec la copie