N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-2iz-3-2i\sqrt{3}=0$.

   a) Vérifier que $(2\sqrt{3}+2\,i)^2 = 8+8i\sqrt{3}$.

   b) Résoudre l'équation (E).

On considère les points I, A et B d'affixes $z_I = i$, $z_A=-\sqrt{3}$ et $z_B=\sqrt{3}+2i$.

Dans **la figure 1** de l'annexe jointe, on a tracé le cercle (ζ) de centre I et de rayon 2.

2) a) Justifier que $z_B - z_A = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   b) Montrer que $[AB]$ est un diamètre de (ζ).

   c) Placer les points A et B.

3) Soit H le point d'affixe $z_H=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i$.

   a) Montrer que les points A , B et H sont alignés.

   b) Justifier que $z_H=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

   c) Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB). Placer le point H.

4) La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par B coupe (OH) en un point K d'affixe z_K.

   a) Justifier que $\mathrm{Re}(z_K)=\sqrt{3}$.

   b) Déterminer alors z_K.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,3)$, $B(-3,1,1)$ et $C(3,-2,1)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

   En déduire que les points A , B et C déterminent un plan P.

   b) Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x+2y-2z+3=0$.

2) a) Vérifier que le point $D(3,5,-1)$ n'appartient pas au plan P.

b) Soit Q le plan passant par D et parallèle au plan P.

Montrer qu'une équation cartésienne de Q est $x+2y-2z-15=0$.

3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+5=0$.

a) Montrer que (S) est la sphère de centre $I(2,3,1)$ et de rayon $R=3$.

b) Montrer que (S) est tangente au plan P en A et au plan Q en D.

4) Soit $t\in\left]1,+\infty\right[$, on considère le point $J(2+t,3+2t,1-2t)$.

a) Montrer que les points A, D et J sont alignés.

b) Vérifier que $d(J,P)=3t+3$ et $d(J,Q)=3t-3$.

5) Soit (S_t) la sphère de centre J et tangente au plan P.

Montrer que (S_t) et Q se coupent suivant le cercle de rayon $r=6\sqrt{t}$ et de centre D.

Exercice 3 (3 points)

Une étude médicale faite sur une population donnée a montré que :

- 20% des individus de la population sont diabétiques.
- Parmi les individus diabétiques, 30% souffrent d'insuffisance rénale.
- Parmi les individus non diabétiques, 5% souffrent d'insuffisance rénale.

On choisit au hasard une personne dans cette population et on considère les événements suivants :

D : « La personne choisie est diabétique ».

R : « La personne choisie souffre d'insuffisance rénale».

1) a) Donner les probabilités $p(D)$, $p(R/D)$ et $p(R/\overline{D})$.

b) Montrer que $p(R)=0.1$.

c) Sachant que la personne choisie souffre d'insuffisance rénale, quelle est la probabilité qu'elle soit diabétique.

2) L'étude a montré aussi que le coût estimé, par personne, des soins annuels relatifs aux deux maladies objets de l'étude est :

- Zéro Dinars si la personne ne souffre d'aucune des deux maladies.
- 2000 Dinars si la personne est uniquement diabétique.
- 3000 Dinars si la personne souffre uniquement d'insuffisance rénale.
- 6000 Dinars si la personne est diabétique et souffre d'insuffisance rénale.

On désigne par X l'aléa numérique donnant le coût estimé, par personne, des soins annuels relatifs aux deux maladies objets de l'étude.

a) Vérifier que $p(X=0)=0.76$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 4 (7.5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\,\dfrac{e^x}{x^2}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I/1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\left((x-1)^2+1\right)e^x}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit F la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{e^x}{x}$ et (C_F) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Etudier la position relative de (C_f) et (C_F).

b) Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,,+\infty[$.

II/ Dans **la figure 2** de l'annexe jointe, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C_F) et on a placé un réel $\alpha>1$ sur l'axe des abscisses.

1) a) En utilisant (C_F), construire les points $A(2\,,f(2))$ et $B\left(\dfrac{1}{2},f(\dfrac{1}{2})\right)$.

b) Tracer la courbe (C_f). (On précisera le point d'abscisse 1).

2) Soit $t\in]0\,,+\infty[\setminus\{1\}$ et $S(t)$ la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=t$ et $x=1$. On note $A(t)$ l'aire de la partie $S(t)$.

a) Hachurer $S(\alpha)$.

b) Vérifier que $A(\alpha)=F(\alpha)-e$.

c) Soit $t\in]0\,,1[$. Montrer que $A(t)=F(t)-e$.

d) En utilisant (C_F), construire sur l'axe des abscisses, le réel $t_0\in]0,1[$ tel que $A(t_0)=A(\alpha)$.

3) Soit U la suite définie par $u_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} F(x)\,dx$, $n\geq 1$.

a) Déterminer graphiquement le sens de variation de F sur $]0,1]$.

b) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, $\dfrac{1}{n+1}\,e^{\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}\,e^{\frac{1}{n+1}}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session principale (2025)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

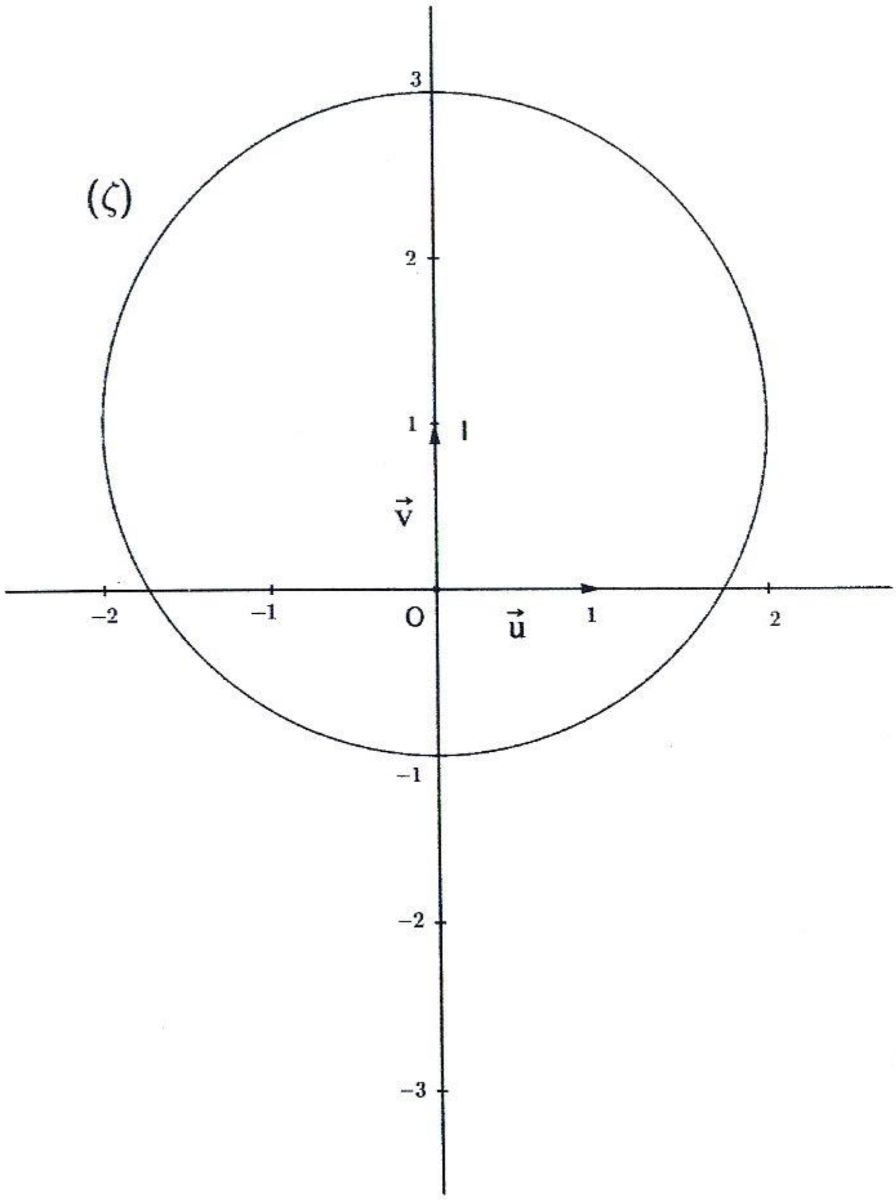

Figure 2