

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale 2025
	Épreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 4h	Coefficient de l'épreuve : 4

N° d'inscription

--	--	--	--	--	--

*Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.*

Exercice 1 (5 points)

Dans la **figure 1** de l'annexe jointe, ABCD est un losange de centre O tel que

$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$, AOE est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct et I est

le point d'intersection de (AD) et (OE).

Soit f la similitude directe qui transforme B en C et D en A.

1.a) Montrer que $f(O) = O$.

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de f est $\frac{\pi}{2}$ et que son rapport est égal à $\sqrt{3}$.

2. On pose $F = f(A)$.

a) Justifier que $f \circ f$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

b) Montrer que F est le symétrique de D par rapport à B.

On pose $g = S_{(AF)} \circ f$.

3.a) Montrer que g est une similitude indirecte et déterminer son rapport.

On note Ω le centre de g.

b) Déterminer $g(D)$ et $g(A)$.

c) En déduire que Ω est le symétrique de B par rapport à D. Construire alors Ω .

4.a) Montrer que la droite (OI) porte la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OA})$.

b) Vérifier que le triangle $D\Omega A$ est isocèle en D et déduire que (AI) porte la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A\Omega})$.

c) En déduire que (OI) est l'axe de g.

5. La droite (ΩI) coupe (AF) en J.

a) Montrer que $g(I) = J$. Déduire $f(I)$.

b) Montrer que les points O, I, A et J appartiennent à un même cercle.

Exercice 2 (4.5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $2z^2 - (7 + i\sqrt{3})z + 9 + i\sqrt{3} = 0$.

1.a) Vérifier que $(1 + 3i\sqrt{3})^2 = -26 + 6i\sqrt{3}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On a tracé dans la **figure 2** de l'annexe jointe le cercle Γ de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1$, $z_B = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $z_C = 2 + i\sqrt{3}$.

2.a) Justifier que $B \in \Gamma$.

b) Construire les points B et C.

3. On donne les points E et K d'affixes respectives $z_E = -\frac{1}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ et $z_K = 4$.

a) Montrer que $\frac{z_E - z_C}{z_A - z_K} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(K) = C$ et $\varphi(A) = E$.

c) Montrer que φ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

4.a) Montrer que l'expression complexe de φ est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - i\sqrt{3}$.

b) Montrer que B est le centre de φ .

c) Construire le point E.

5. Soit F le point d'affixe $z_F = 1$.

a) Vérifier que $\overline{EF} = \frac{3}{5}\overline{EC}$.

On pose $F' = \varphi(F)$.

b) Montrer que $F' \in [EC]$ et construire F' .

c) Montrer que $F'E = FA$ et $FF' = FB$.

d) Vérifier que $\overline{AF} = \frac{2}{5}\overline{AK}$ et en déduire que $\overline{EF'} = \frac{2}{5}\overline{EC}$.

e) Montrer que $FA + FB + FC = EC$.

Exercice 3 (4.5 points)

I) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_1): 5u - 29v = 16$.

1.a) Vérifier que le couple $(9,1)$ est une solution de (E_1) .

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_1) .

2. Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S)
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 18 \pmod{29} \end{cases}$$

Montrer que x est solution de (S) si, et seulement si $x \in \{47 + 145k ; k \in \mathbb{Z}\}$.

II) 1.a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Reste modulo 5 de x	0	1	2	3	4
Reste modulo 5 de x^3					

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^3 \equiv 3 \pmod{5}$.

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_2): x^3 \equiv 3 \pmod{29}$.

2.a) Justifier que $3^{28} \equiv 1 \pmod{29}$.

b) Montrer que 3^{19} est une solution de (E_2) .

c) Vérifier que $3^6 \equiv 4 \pmod{29}$ et en déduire que $3^{19} \equiv 18 \pmod{29}$.

d) Justifier que 18 est un inverse de 3^9 modulo 29.

3. Soit x une solution de (E_2) .

a) Montrer que x et 29 sont premiers entre eux.

b) Montrer que $3^9 x \equiv 1 \pmod{29}$.

4. Montrer que x est solution de (E_2) si, et seulement si $x \equiv 18 \pmod{29}$.

III) Soit $x \in \mathbb{Z}$.

1.a) Montrer que $x^3 - 3 \equiv 0 \pmod{145}$ équivaut à
$$\begin{cases} x^3 \equiv 3 \pmod{5} \\ x^3 \equiv 3 \pmod{29} \end{cases}$$

b) Montrer alors que $x^3 \equiv 3 \pmod{145}$ équivaut à
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 18 \pmod{29} \end{cases}$$

2. Déterminer le plus petit entier $a > 0$ tel que $a^3 \equiv 3 \pmod{145}$.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, e[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x} & \text{si } 0 < x < e, \\ f(0) = -1. \end{cases}$$

I) On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

2.a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 1}{x} = +\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

3.a) Montrer que pour tout $x \in]0, e[$, $f'(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4. Soit I le point de ζ d'abscisse $\frac{1}{e}$.

On donne ci-contre le tableau de variation de f' .

a) Justifier que I est un point d'inflexion de la courbe ζ .

b) Montrer qu'une équation de la tangente T à la courbe ζ au point I est $y = \frac{e}{4}x - \frac{3}{4}$.

c) Etudier la position relative de ζ et T .

x	0	$\frac{1}{e}$	e		
$f''(x)$		-	0	+	
f'	$+\infty$		$\frac{e}{4}$		$+\infty$

Dans la figure 3 de l'annexe jointe, on a tracé la tangente T et la droite d'équation $x = e$.

5.a) Construire le point I .

b) Tracer la courbe ζ . (On précisera le point d'intersection de ζ et l'axe des abscisses).

II) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \sqrt{e} - 1$ et $U_n = \int_1^{\sqrt{e}} (f(x))^n dx$, pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2.a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{\sqrt{e}} x f'(x) (f(x))^n dx = \frac{\sqrt{e}}{n+1} - \frac{1}{n+1} U_{n+1}.$$

b) Vérifier que pour tout $x \in]0, e[$, $[1 + f(x)]^2 = x f'(x)$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+2} + 2U_{n+1} + U_n = \frac{\sqrt{e}}{n+1} - \frac{1}{n+1} U_{n+1}$.

d) On désigne par ℓ la limite de la suite U . Montrer que $\ell = 0$.



Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2025)
Annexe à rendre avec la copie

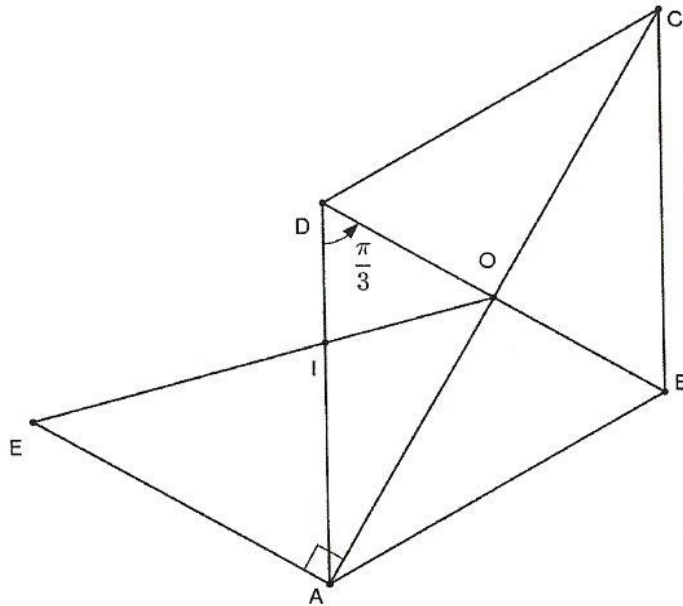


Figure 1

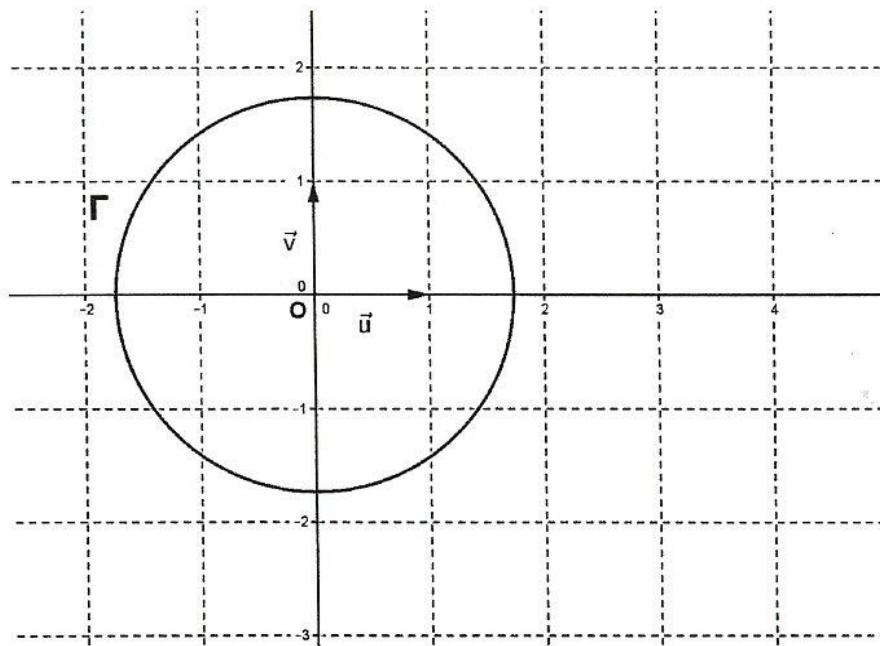


Figure 2

Ne rien écrire ici

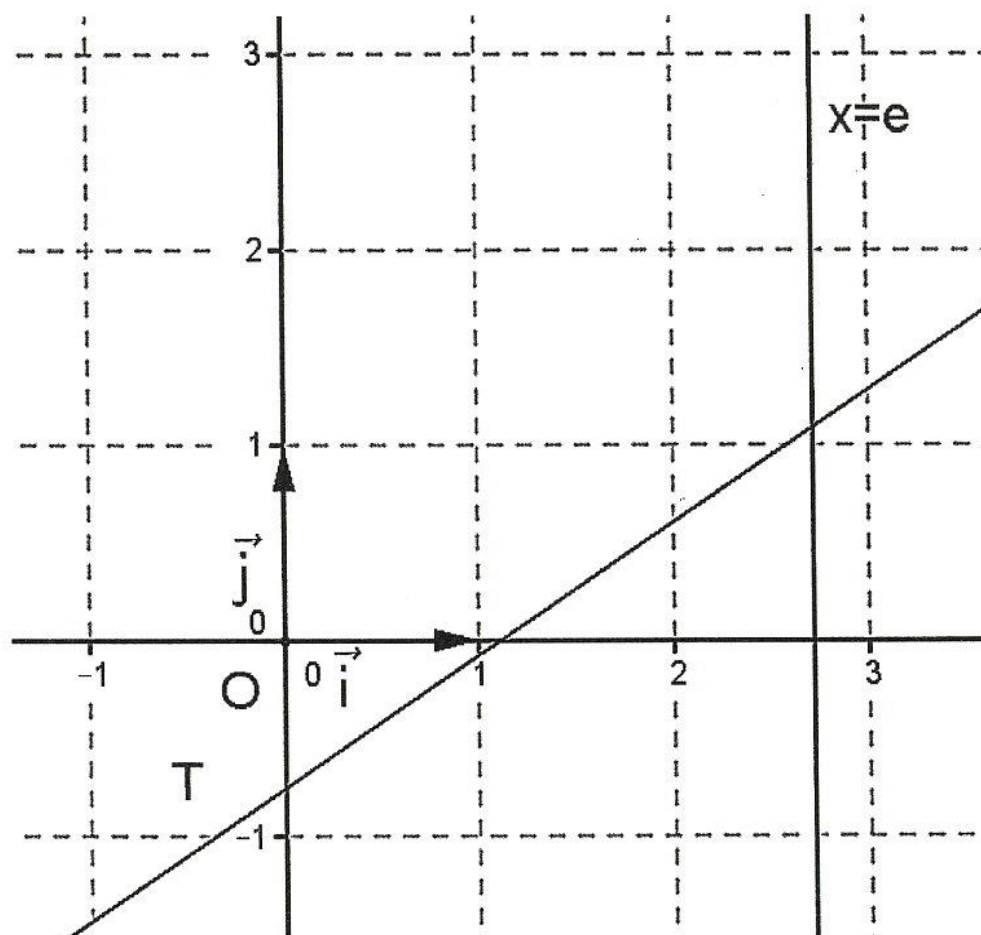


Figure 3