

N° d'inscription

**Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
(La page 4/4 est à rendre avec la copie)**

Exercice 1(5 points)

- 1) On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 + (1+i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.
- Vérifier que -2 est une solution de (E).
 - Trouver l'autre solution.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = -z_B$ et le cercle (C) de centre O et passant par A.

- Montrer que B est un point du cercle (C).
 - Construire alors le point B puis le point C.
 - Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
- La droite (AC) coupe l'axe imaginaire en un point D.
 - Placer le point D.
 - On pose $z_D = ia$ où a est un réel.
Montrer que $(z_A - z_C)\overline{(z_A - z_D)} = 2 + a\sqrt{3} + i(2\sqrt{3} - a)$.
 - En déduire que $a = 2\sqrt{3}$.
- Montrer que le point C est le milieu du segment [AD].

Exercice 2 (4 points)

- Justifier que $\text{PGCD}(575, 75) = 25$.
- On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations (E) : $23x + 3y = 1$ et (E') : $23x + 3y = 64$.
 - Vérifier que (-1, 8) est une solution de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E').
 - Montrer que l'ensemble des solutions de (E') est $\{(-64 + 3k, 512 - 23k), k \in \mathbb{Z}\}$.
- Un centre d'appel a acheté n écrans au prix de 575 DT l'unité et p casques au prix de 75 DT l'unité. Le coût total de cet achat s'élève à 1600 DT.
 - Montrer que (n, p) vérifie l'équation (E').
 - Déterminer le nombre d'écrans et de casques achetés par le centre d'appel.

Exercice 3 (4 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer que A est inversible. (On notera A^{-1} la matrice inverse de A)

b) Calculer A^2 et en déduire que $A^2 + 4A = 5I_3$.

c) Montrer alors que $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) On considère le système (S) suivant :
$$\begin{cases} -3x + 2y + 2z = -10 \\ 2x - 3y + 2z = 10 \\ 2x + 2y - 3z = 20 \end{cases}$$
 où x, y et z des réels.

a) Donner l'écriture matricielle de (S).

b) Résoudre alors (S).

Exercice 4 (7 pts)

I. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x+1)e^x + 1$.

1) Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (x+2)e^x$.

2) a) Etudier les variations de g .

b) Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

II. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x + x$.

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $-\infty$.

b) Etudier la position relative de (Γ) et Δ .

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Montrer que le point $I(-2, f(-2))$ est un point d'inflexion de (Γ) .

b) On désigne par T la tangente à (Γ) au point I .

Montrer qu'une équation de T est : $y = \frac{1}{e^2} [(e^2 - 1)x - 4]$.

- c) Vérifier que le point $K(-4, -4)$ est un point de T .
- 4) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la droite Δ et on a placé le point I . Placer le point K puis Tracer la tangente T et la courbe (Γ) .
- 5) Soit n un entier naturel non nul.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_{-n}^0 x e^x dx = n e^{-n} + e^{-n} - 1$.

- b) On désigne par A_n l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par (Γ) , Δ et les droites d'équations $x = -n$ et $x = 0$.

Déterminer A_n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session principale (2026)
Annexe à rendre avec la copie

