RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT ❀ Session de contrôle 2025	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. ***La page 4/4 est à compléter et à rendre avec la copie.***

Exercice 1 :(4points)

Dans un laboratoire de recherche, un ingénieur souhaite optimiser le temps **T** en heures de charge d'une batterie en faisant varier la tension d'alimentation **V** en volts.
Les résultats de l'expérience sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tension **V** (en volts)	10	12	14	16	18	20
Temps de charge **T** (en heures)	9.4	8.4	7.3	6.6	5.6	5.1

1) a) Construire, dans l'annexe ci-jointe, le nuage des points associé à la série (**V,T**).
   b) Ce nuage permet-il d'envisager un ajustement affine entre V et T ?
2) Donner une équation cartésienne de la droite de régression de T en V (Les valeurs seront arrondies à 10^{-2} près).
3) Estimer le temps de charge de cette batterie si la tension d'alimentation est de 17 volts.
4) On suppose que le temps de charge de cette batterie est une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $\left[5,10\right]$.
   a) Quelle est la probabilité que la batterie ait un temps de charge inférieur à 8 heures ?
   b) Quelle est la probabilité que le temps de charge de la batterie soit compris entre 6 et 8 heures ?
   c) On sait que la batterie est en charge depuis 6 heures, quelle est la probabilité que la durée totale de charge soit inférieure à 8 heures ?

Exercice 2 :(5points)

I) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\theta): z^2 - 2z + 1 - e^{-2i\theta} = 0$ avec θ est un réel.

1) Montrer que (E_θ) est équivalente à $(z-1)^2 = (e^{-i\theta})^2$.
2) Résoudre alors l'équation (E_θ) dans $\mathbb{C}$.

II) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , M et N d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_M = 1 + e^{-i\theta}$ et $z_N = 1 - e^{-i\theta}$ avec $\theta \in \left]0,\pi\right[$.

1) a) Vérifier que le point A est le milieu du segment $[MN]$.
   b) Montrer que M et N sont deux points du cercle de centre A et de rayon 1.
   c) Déduire que le triangle OMN est rectangle en O.

2) Soit M' le point d'affixe $z_{M'} = (1 + i\sqrt{3})z_M$.

a) Montrer que $OM' = 2OM$.

b) Montrer que $MM' = \sqrt{3}\,OM$.

c) En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M.

3) a) Montrer que $z_M = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{-i\frac{\theta}{2}}$.

b) Montrer que l'aire du triangle OMM' est $\mathcal{A} = 2\sqrt{3}\cos^2(\frac{\theta}{2})$.

c) Déterminer la valeur de θ pour que $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3:(5points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(2, -2, 1)$; $B(1, 1, -1)$; $I(1, -1, 1)$ et le vecteur $\vec{u} = 2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

1) a) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$.

b) Vérifier que $\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB} = \vec{u}$.

c) Déduire l'aire du triangle IAB.

2) On désigne par :

P le plan qui passe par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{IA}$.

Q le plan qui passe par le point B et de vecteur normal $\overrightarrow{IB}$.

S la sphère tangente au plan Q en B et qui coupe le plan P suivant le cercle (ζ) de centre A et de rayon r.

a) Montrer que la sphère S est de centre le point I.

b) Vérifier que le rayon R de la sphère S est égal à $2\sqrt{2}$.

c) Montrer que $r = \sqrt{6}$.

d) Donner une équation cartésienne de la sphère S.

3) a) Montrer que les plans P et Q sont sécants suivant une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}$.

b) Montrer que le point $H(4, 0, -2)$ appartient à la droite Δ.

c) Donner alors une représentation paramétrique de la droite Δ.

Exercice 4 :(6points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - e^{x} - x$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b) Montrer que la droite $\Delta : y = -x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $(-\infty)$.

   c) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite Δ .

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = (e^{x} - 1)(2e^{x} + 1)$.

   b) Dresser le tableau de variation de f .

   c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

4) Tracer, sur votre copie, la droite Δ et la courbe (C_f) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) Pour λ un réel strictement négatif, on désigne par A_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , la droite Δ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.

   a) Montrer que $A_\lambda = \dfrac{1}{2}(e^{\lambda} - 1)^2$.

   b) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A_\lambda$.

6) Pour α un réel strictement positif, on désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n + f(u_n),\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n + f(\alpha)$.

   c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq \alpha + nf(\alpha)$.

   d) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .
Nom et Prénom : . . . .
Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .
. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session de contrôle (2025)
Annexe à rendre avec la copie