

N° d'inscription

--	--	--	--	--	--

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1 sur 3 à 3 sur 3.

Exercice 1 (5 points)

- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 + 4z - 8 + 16i = 0$.
 - Vérifier que $(8 - 4i)^2 = 48 - 64i$.
 - Résoudre l'équation (E).
- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E'): $z^3 + 6z^2 + 16iz - 16 + 32i = 0$.
 - Vérifier que (-2) est une solution de (E').
 - Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $z^3 + 6z^2 + 16iz - 16 + 32i = (z + 2)(z^2 + 4z - 8 + 16i)$.
 - Résoudre alors l'équation (E').
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B, C et K d'affixes respectives $z_A = 2 - 2i$, $z_B = 4 + 2i$, $z_C = -6 + 2i$ et $z_K = -2$.
 - Calculer $(z_B - z_A)(\overline{z_C - z_A})$. En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.
 - Déterminer l'affixe du point D symétrique de B par rapport à K.
 - Montrer que ABCD est un parallélogramme et calculer son aire.

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient six boules indiscernables au toucher numérotées : 2, 2, 4, 4, 3, 9.

Une épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

- On considère l'événement A : « obtenir deux boules dont les numéros sont premiers entre eux ».

Montrer que $p(A) = \frac{8}{15}$.
- Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le **PGCD** des deux numéros portés par les boules tirées.
 - Montrer que $p(X = 2) = \frac{1}{3}$.
 - Compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$		

- 3) On répète l'épreuve précédente n fois de suite ($n \geq 2$) en remettant à chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Soit p_n la probabilité que l'événement A soit réalisé au moins une fois.

- Montrer que $p_n = 1 - \left(\frac{7}{15}\right)^n$.
- Montrer que pour tout $n \geq 2$, $p_{n+1} \geq p_n$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.
- Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $p_n \geq 0,999$.

Exercice 3 (5 points)

I) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 101 & 10 & -111 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 & -121 & -1 \\ 10 & 323 & 3 \\ 10 & -81 & -1 \end{pmatrix}$.

- Calculer le déterminant de la matrice A . En déduire que A est inversible. (On notera A^{-1} la matrice inverse de A).

- Calculer $A \times B$. En déduire que $A^{-1} = \frac{1}{40}B$.

2) On considère le système (S):
$$\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ -x + z = 3 \\ 101x + 10y - 111z = -353 \end{cases}$$
 où x , y et z sont des réels.

- Ecrire le système (S) sous forme matricielle.

- Résoudre alors le système (S).

- II) Un entier naturel N de quatre chiffres s'écrit $N = abac$ (en base 10) où c désigne le chiffre des unités, a est à la fois le chiffre des dizaines et le chiffre des milliers et b celui des centaines.

- Vérifier que $N = 1010a + 100b + c$.

- L'entier N vérifie les trois conditions suivantes :

Condition 1 : La somme des quatre chiffres de N est égale à 9.

Condition 2 : Le nombre $N_1 = abca$ obtenu en intervertissant le chiffre des unités avec celui des dizaines est égal à N augmenté de 27.

Condition 3 : Si on écrit les chiffres de N à l'envers (c'est-à-dire $caba$), on obtient un entier N_2 égal à N augmenté de 3177.

- Monter que la **condition 2** se traduit par la relation : $-a + c = 3$.
- Monter que la **condition 3** se traduit par la relation : $101a + 10b - 111c = -353$.
- Montrer que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).
- Déterminer alors l'entier N .

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (1 - x^3) \ln x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Vérifier que pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{x} - x^2\right) \ln x$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\left(3x^2 \ln x + \frac{x^3 - 1}{x}\right)$.

b) Montrer que $x^3 - 1$ et $\ln x$ ont le même signe sur $]0, +\infty[$.

c) Dédurre que le tableau de signe de f' est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

d) Dresser le tableau de variation de f .

3) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

4) Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e f(x) dx = \frac{15}{16} - \frac{3}{16} e^4$.

b) Dédurre la valeur de $\mathcal{A}$.