

N° d'inscription

**Exercice 1 : (5 points).**

I) On considère dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $2z^2 - 3(\sqrt{3} + 3i)z - 9 + 9i\sqrt{3} = 0$ .

1) Vérifier que  $(3\sqrt{3} - 3i)^2 = 18 - 18i\sqrt{3}$ .

2) Résoudre alors l'équation (E).

II) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On donne les points A et B d'affixes respectives :  $z_A = 3i$  et  $z_B = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ .

Dans la **figure 1** de l'annexe, on a placé le point A et on a tracé la droite D d'équation  $y = 3$  et le cercle  $\Gamma$  de centre O et de rayon 3.

1) a) Montrer que B appartient au cercle  $\Gamma$

b) Montrer que  $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

c) Construire B.

2) Soit E le point d'affixe  $z_E = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

a) Montrer que  $z_E = \sqrt{3} + 3i$ . En déduire que le point E appartient à la droite D.

b) Construire E.

3) a) Vérifier que  $z_E - z_B = i\frac{\sqrt{3}}{3}z_B$ .

b) Déduire que les droites (BE) et (OB) sont perpendiculaires.

4) La droite (BE) coupe l'axe des ordonnées en F et (OB) coupe la droite D en H.

a) Montrer que H est l'orthocentre du triangle OEF.

b) On pose  $z_H = x + iy$  l'affixe du point H, avec x et y deux nombres réels.

Justifier que  $y = 3$ .

c) Montrer que  $\frac{z_H}{z_B} = \frac{3 + x\sqrt{3}}{6} + i\frac{3\sqrt{3} - x}{6}$ .

d) Déterminer alors l'affixe du point H.

## Exercice 2 : (5 points).

L'espace  $(E)$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(1,1,0)$ ,  $B(0,1,1)$  et  $C(-1,5,-2)$ .

- 1) a) Déterminer les composantes du vecteur  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  .  
b) En déduire que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent un plan  $P$  dont une équation cartésienne est  $x + y + z - 2 = 0$  .
- 2) Soit  $Q$  le plan d'équation  $x + y + z + 1 = 0$  .  
a) Prouver que  $P$  et  $Q$  sont strictement parallèles.  
b) Soit  $I(x, y, z)$  un point du plan  $Q$  .

Montrer que le volume du tétraèdre  $IABC$  est égal à 2.

- 3) a) Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  .  
b) Soit  $H$  le milieu du segment  $[BC]$  et  $\Delta$  la droite dont une représentation

$$\text{paramétrique est : } \begin{cases} x = \alpha - \frac{1}{2} \\ y = \alpha + 3 \\ z = \alpha - \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Vérifier que  $H$  un point de  $\Delta$  et Montrer que  $\Delta$  est perpendiculaire à  $P$  en  $H$  .

- 4) Soit  $\Omega\left(\alpha - \frac{1}{2}, \alpha + 3, \alpha - \frac{1}{2}\right)$  un point de  $\Delta$  .

$S_\alpha$  la sphère de centre  $\Omega$  et passant par  $B$  .

- a) Montrer que le rayon de la sphère  $S_\alpha$  est  $R = \sqrt{3\alpha^2 + \frac{13}{2}}$  .
- b) Montrer que pour tout réel  $\alpha$  , la sphère  $S_\alpha$  passe par le point  $C$  .
- c) Montrer que pour tout réel  $\alpha$  , le plan  $P$  coupe la sphère  $S_\alpha$  selon un cercle  $\Gamma$  dont on déterminera le centre et le rayon.
- d) Déterminer le réel  $\alpha$  pour que la sphère  $S_\alpha$  soit tangente au plan  $Q$  .

## Exercice 3 : ( 3 points).

La durée de vie d'un téléviseur intelligent, exprimée en année, jusqu'à survienne la première panne est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,15$  . **Toutes les probabilités seront arrondies à  $10^{-3}$  près .**

- 1) Calculer  $p(X \geq 3)$  .
- 2) A quel instant  $t$  , à un mois près, la probabilité qu'un téléviseur tombe en panne pour la première fois est égale à 0,5 .
- 3) Sachant qu'un téléviseur n'a pas eu de panne au cours des trois premières années, quelle est la probabilité qu'il soit en état de marche au bout de six ans ?

- 4) On considère un lot de cinq téléviseurs fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un téléviseur qui n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années.

### Exercice 4 : ( 7 points)

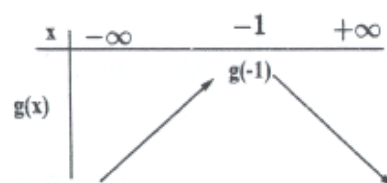
Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - xe^x$ .

On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- b) Montrer que la droite  $D : y = x$  est une asymptote à  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$ .
- c) Etudier la position relative de  $(C_f)$  et  $D$ .
- d) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ; calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement les résultats.
- 2) a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ;  $f'(x) = -(xe^x + e^x - 1)$ .
- b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $e^x - 1 \geq 0$ .
- c) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x$  et  $f'(x)$  sont de signes contraires.
- d) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) a) Vérifier que  $y = x + \frac{1}{e}$  est une équation cartésienne de la tangente  $T$  à

$(C_f)$  au point  $B(-1, f(-1))$ .

- b) Justifier que  $T$  est parallèle à la droite  $D$ .
- c) On donne dans le tableau ci-contre, le sens de



variation de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -xe^x - \frac{1}{e}$ .

Calculer  $g(-1)$ . En déduire que  $(C_f)$  est au-dessous de  $T$ .

- 4) Dans la **figure 2** de l'annexe, on a placé le point  $B$ .
- a) Tracer dans la **figure 2**, l'asymptote  $D$ , la tangente  $T$  et la courbe  $(C_f)$ .
- b) On désigne par  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C_f)$ , la droite  $D$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \ln 2$ .

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que  $A = 2\ln(2) - 1$ .

5) Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n e^{u_n} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 0$ .

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

6) Soit  $(S_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $S_n = f(u_0) + f(u_1) + f(u_2) + \dots + f(u_n)$ .

a) Vérifier que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f(u_k) = u_k - u_{k+1}$ .

b) Montrer alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = -1 - u_{n+1}$ .

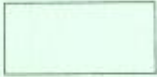
c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Signatures des surveillants

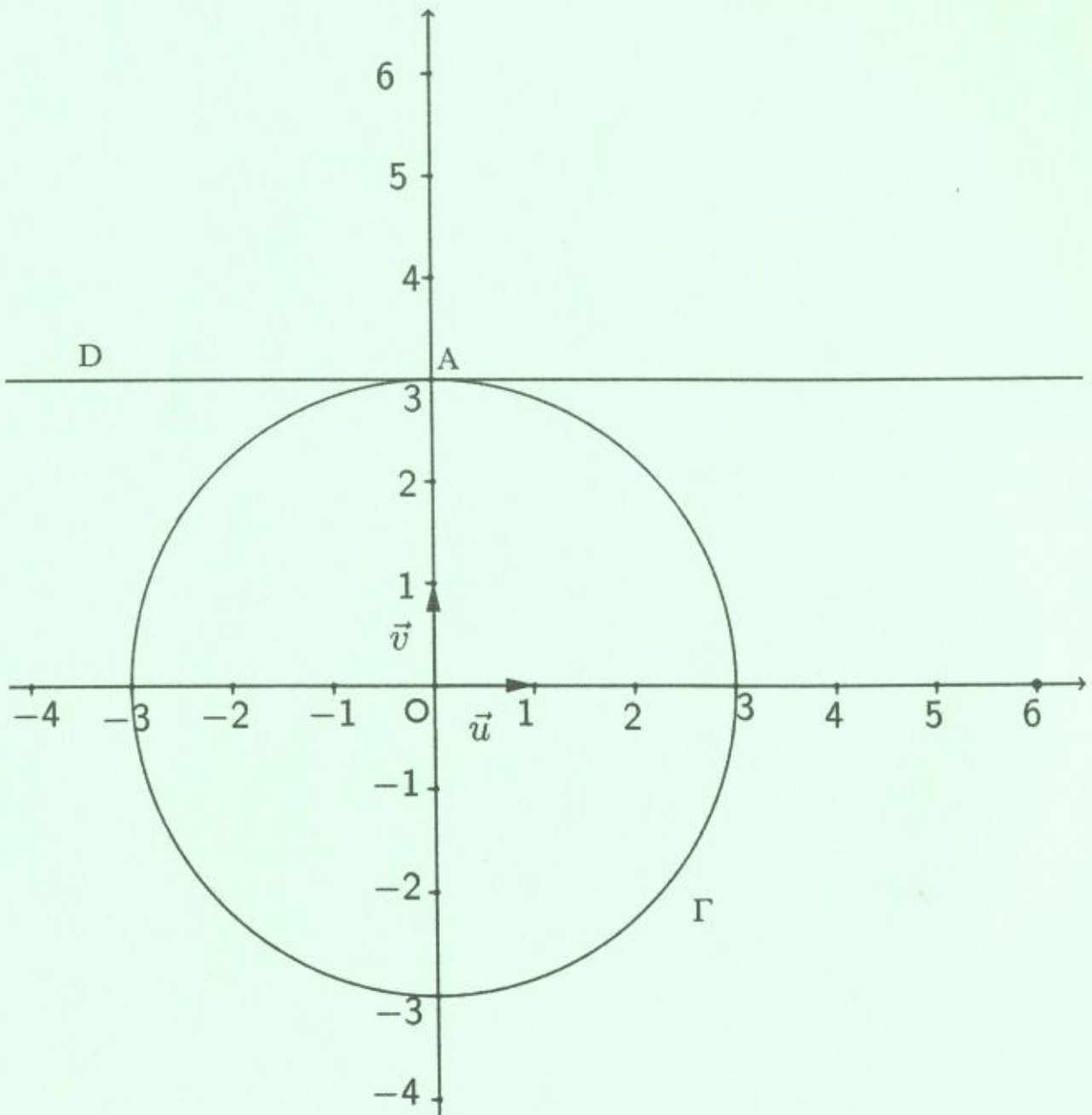
Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....



**Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques**  
**Session de contrôle (2026)**  
**Annexe à rendre avec la copie**

Figure 1



Ne rien écrire ici

Figure 2

