

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT * * * Session de contrôle 2026	
	Épreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 4h	Coefficient de l'épreuve : 4

N° d'inscription

Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice1 (6 points)

Dans la **figure 1** de l'annexe jointe, O et B sont deux points distincts du plan, ζ est le cercle de centre O et passant par B et A est un point de ζ distinct de B .

Les points C et K sont les milieux respectifs des segments $[OB]$ et $[OA]$.

1. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie O sur A et C sur K .
 b) Montrer que f est une symétrie glissante.
 c) Vérifier que l'axe de f est la droite (CK) . Ecrire alors la forme réduite de f .
2. On pose $g = h_{(A,2)} \circ f$, où $h_{(A,2)}$ est l'homothétie de centre A et de rapport 2 .
 a) Montrer que g est une similitude indirecte et déterminer son rapport.
 b) Vérifier que $g(O) = A$ et $g(C) = O$.

On note Ω le centre de g et on désigne par h' l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

3. a) Vérifier que $\overrightarrow{\Omega A} = 4 \overrightarrow{\Omega C}$.

b) Montrer que $h'(A) = \Omega$. Construire, dans la **figure 1**, le point Ω puis l'axe Δ de g .

Dans la suite on suppose que A décrit le cercle ζ privé des points B et D où D est le point symétrique de B par rapport à O . On pose $F = h'(B)$.

4. a) Montrer que $h'(D) = B$ puis que les droites (ΩB) et (AD) sont parallèles.
 b) Montrer que lorsque A varie, le point Ω décrit le cercle ζ' de diamètre $[BF]$ privé des points B et F .
5. On pose $E = g(B)$.
 a) Montrer que E est le symétrique de A par rapport à O .
 b) Montrer que les points Ω , B et E sont alignés.
 c) Montrer que lorsque A varie, l'axe Δ de g passe par un point fixe que l'on déterminera.

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer au hasard, successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1. On considère les événements :

A : « Avoir au moins une boule blanche » et B : « La première boule tirée est noire ».

Vérifier que $P(A) = \frac{8}{9}$ et calculer $P(B)$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On répète l'épreuve précédente n fois de suite en remettant à chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

2. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé.

a) Déterminer, en fonction de n , la loi de probabilité de X .

b) Déterminer, en fonction de n , l'espérance mathématique de X .

3. Dans cette question, on désigne par Y l'aléa numérique qui prend pour valeurs :

0 si l'évènement A n'est pas réalisé au cours des n épreuves,

k si l'évènement A est réalisé pour la première fois à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ($1 \leq k \leq n$).

a) Déterminer $P(Y = 0)$.

b) Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(Y = k) = 8 \left(\frac{1}{9}\right)^k$.

4. On note $E(Y)$ l'espérance mathématique de Y .

a) Montrer que $E(Y) = \frac{8}{9} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}$.

b) Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

Vérifier que $E(Y) = \frac{8}{9} f'\left(\frac{1}{9}\right)$ où f' est la fonction dérivée de f .

c) Vérifier que pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

d) En déduire que $E(Y) = \frac{9}{8} \left(n \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} - (n+1) \left(\frac{1}{9}\right)^n + 1 \right)$.

e) Montrer que pour tout $a \in]0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a^n = 0$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y)$.

Exercice 3 (3points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $13x - 9y = 4$.

1. a) Vérifier que le couple (1,1) est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $(u, v) = (1 + 9k, 1 + 13k)$ une solution de (E) et $d = u \wedge v$.

a) Montrer que $d \in \{1, 2, 4\}$.

b) Montrer que $d = 4$ si et seulement si $k \equiv 3 \pmod{4}$.

c) Montrer que $\begin{cases} u \equiv 0 \pmod{2} \\ v \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$ si et seulement si $k \equiv 1 \pmod{2}$.

d) Vérifier que $k \equiv 1 \pmod{2}$ si et seulement si $k \equiv 1 \pmod{4}$ ou $k \equiv 3 \pmod{4}$.

e) Déterminer, suivant les valeurs de k , la valeur de d .

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie I

1. a) Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. Interpréter graphiquement.

2. a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

3. Dans la figure 2 de l'annexe, On a tracé la courbe C_g de la fonction g définie

sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -\frac{1}{x}$.

a) Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la courbe C_g .

b) Tracer la courbe C_f dans la figure 2.

4. a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\int_1^x (\ln(t+1) - \ln(t)) dt = (x+1) \ln(x+1) - x \ln(x) - 2 \ln 2.$$

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f , C_g et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

Partie II

Soit n un entier naturel non nul.

On désigne par A_n l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f , C_g et les droites d'équations respectives $x = n$ et $x = n + 1$.

1. a) Vérifier que $A_n = \int_n^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq A_n \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

2. a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n A_n$.

3. Pour $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_k$.

a) Vérifier que $S_n = \int_1^n (\ln(t+1) - \ln(t)) dt$.

b) Montrer que $S_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - 2 \ln 2$.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(n)}$.

Empty box for identification.

Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....



Empty box for identification.

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session de contrôle (2026)
Annexe à rendre avec la copie

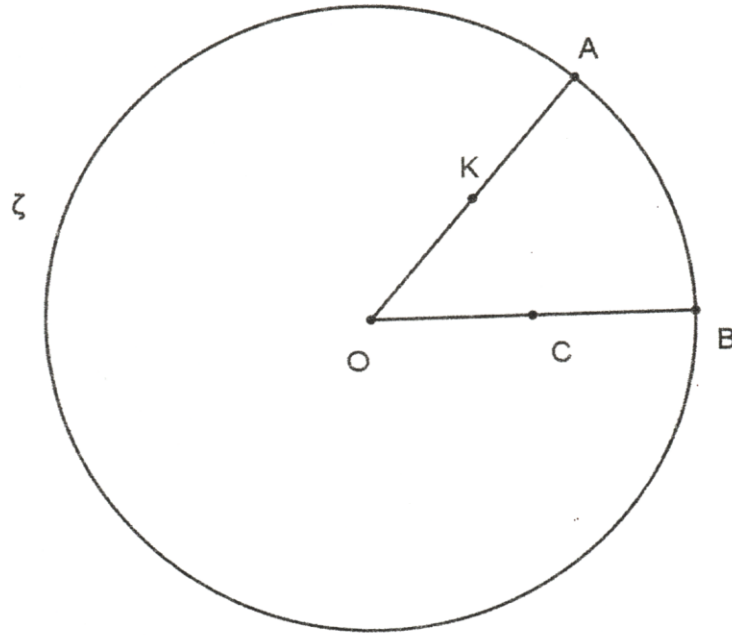


Figure 1

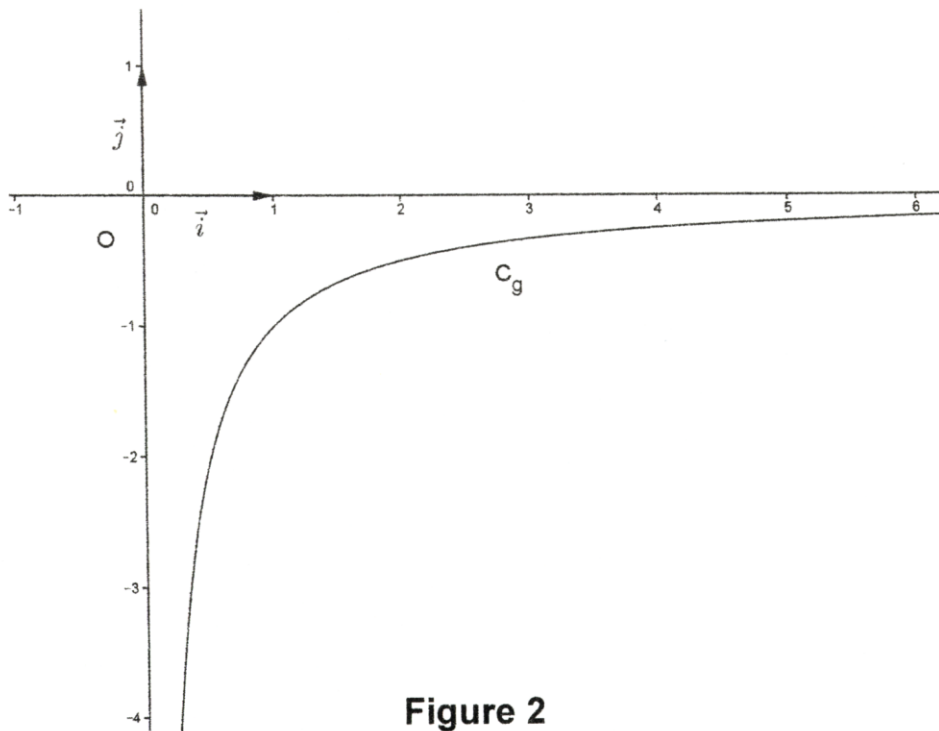


Figure 2