RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT ❀ Session de contrôle 2025	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve: **4**

N° d'inscription

Le sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1 (4 points)

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher, marquées -1 ;-1 ;0 ;0 ; 1.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1. Soit l'événement M : « Avoir deux boules de même numéro ».

Justifier que $P(M) = 0.2$.

2. On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Calculer l'espérance E(X) et la variance V(X) de la variable aléatoire X.

   c) Calculer $P(X \leq E(X))$.

3. Calculer $P\big((X=0)/M\big)$.

4. On répète l'épreuve précédente n fois de suite en remettant à chaque fois les deux boules tirées dans l'urne. ($n \geq 2$).

   a) Déterminer la probabilité p_n d'avoir au moins une fois deux boules de même numéro.

   b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0.99$.

Exercice 2 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{xe^x}{1+x}$.

On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I) 1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement .

2. a) Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(1+x)^2} e^x$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3. a) Montrer qu'une équation de la tangente T à ζ au point d'abscisse 0 est $y = x$.

b) Montrer que pour tout réel x, $e^x \geq 1+x$.

c) Etudier la position relative de ζ et T.

4. a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera.

b) Tracer la courbe ζ de f et la courbe ζ' de f^{-1}.

5. Soit $\lambda \in]-1,0[$. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par ζ, T et les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = 0$.

a) Vérifier que pour tout $x \in]-1, 0]$, $f(x) \leq \dfrac{1}{e}(1 - \dfrac{1}{1+x})$.

b) En déduire que $A(\lambda) \geq -\dfrac{1}{2}\lambda^2 + \dfrac{1}{e}\lambda - \dfrac{1}{e}\ln(1+\lambda)$.

c) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to -1^+} A(\lambda)$.

II) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\alpha_n = f^{-1}(n)$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

2. a) Montrer que $\alpha_n > 0$.

b) Vérifier que $e^{\alpha_n} = n(1 + \dfrac{1}{\alpha_n})$ et en déduire que $\alpha_n = \ln(n) + \ln(1 + \dfrac{1}{\alpha_n})$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n}{\ln(n)}$.

3. On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_{\ln(n)}^{\alpha_n} f(x)dx$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [\ln(n), \alpha_n]$.

$$\frac{\ln(n)}{1+\ln(n)} \leq \frac{x}{1+x} \leq \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}.$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n\ln(n)}{\alpha_n(1+\ln(n))} \leq I_n \leq \dfrac{n}{1+\alpha_n}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = +\infty$.

d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} I_n = 1$.

Exercice 3 (5 points)

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A

tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, D est le symétrique de A par rapport à B et BED est un triangle équilatéral direct.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur E et C sur D.

   b) Montrer que f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

2. Soit I le milieu du segment $[AE]$. La droite (BI) coupe (AC) en F.

   a) Montrer que le triangle AED est rectangle en E et que le triangle AEF est équilatéral.

   b) Soit L le symétrique de A par rapport à F.

   Montrer que E appartient au cercle ζ de diamètre $[AL]$.

   c) La demi-droite $[IF)$ coupe ζ en O. Montrer que O est le centre de f.

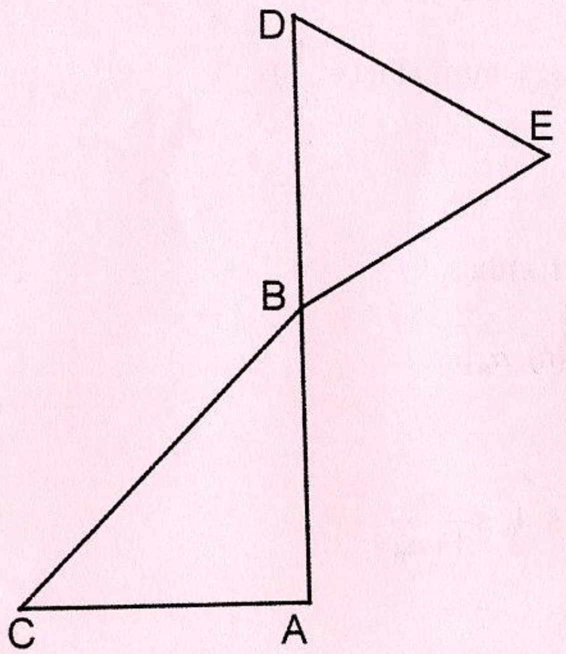
3. Soit $g = f \circ S_{(AC)}$ et J le milieu de $[CD]$.

   a) Déterminer $g(A)$ et $g(C)$.

   b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe.

4. La droite (IJ) coupe (AC) en H et (ED) en K. Montrer que $g(H) = K$.

5. Montrer que le triangle OHK est isocèle en O.



Exercice 4 (4 points)

1. On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E): $5u-3v=1$.

   a) Vérifier que le couple $(2,3)$ est une solution de (E).

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2. a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Reste modulo 3 de x	0	1	2
Reste modulo 3 de x^2			

   b) En déduire que l'équation $x^2 \equiv 2\ (\mathrm{mod}\, 3)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère l'ensemble Γ des points $M(x,y)$ tels que $5x^2-3y-1=0$.

   Montrer que Γ est une parabole dont on déterminera le foyer et la directrice.

4. Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et un point $M(x,y)$ du plan.

   a) Vérifier que si M est un point de Γ alors (x^2,y) est solution de (E).

   b) Montrer que la parabole Γ ne contient aucun point à coordonnées entières.